НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет прикладної математики

Кафедра прикладної математики

Курсова робота

із дисципліни «Методи оптимізації»

на тему: «Метод найшвидшого спуску»

|  |  |
| --- | --- |
| Студента групи КМ-03  Передерея Б. О. | Керівник:  Старший викладач Ладогубець Т. С.  Кількість балів:\_\_\_\_\_\_\_ |
|  | Оцінка:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |

Київ – 2022

**Зміст**

[**Мета роботи** 2](#_Toc133840433)

[**Основна частина** 2](#_Toc133840434)

[**Список використаної літератури** 2](#_Toc133840435)

# **Постановка задачі**

Дослідити збіжність методу найшвидшого спуску при мінімізації функції Розенброка в залежності від:

1. Величини кроку h при обчисленні похідних. +
2. Схеми обчислення похідних. +
3. Способу обчислення кроку: постійний, оптимальний.
4. Виду методу одновимірного пошуку (ДСК-Пауелла або Золотого перетину). +
5. Точності методу одновимірного пошуку. +
6. Значення параметру в алгоритмі Свена. +
7. Вигляду критерію закінчення. .
8. Наявності модифікацій (методи Бута, Люстерніка, важкої кульки).

Використати метод штрафних функцій (метод зовнішньої точки) для умовної оптимізації при розташування локального мінімума поза випуклої допустимої області.

**Теоретична частина**

Один з найпоширеніших методів оптимізації функцій - метод найшвидшого спуску. Цей метод базується на знаходженні мінімуму функції шляхом здійснення кроків у напрямку, протилежному градієнту функції, тобто у напрямку найшвидшого спуску, осклільки від’ємний градієнт у точці направлений у строну найбільшого зменшення по всім компонентам і він є ортогональним лінії рівня у точці .

Алгоритм методу найшвидшого спуску можна описати наступним чином. Спочатку задавши початкову точка x0, проводиться ітераційний процес, на кожному кроці якого виконується наступне:

1. Обчислюється градієнт функції в точці :
2. Знаходиться напрямок спуску, який дорівнює протилежному градієнту з нормуванням:
3. Виконується визначення кроку , який мінімізує функцію (він може бути як сталим, так і оптимальним).
4. Обчислюється нова точка як:
5. Якщо задана точність не досягнута, повторюється ітераційний процес.

Від’єдним градієнт дає лише направлення оптимізації, але не велечину кроку. При цьому можна використовувати різні процедури метода найшвидшого спуску у залежності від вибору кроку

# **Основна частина**

*Вплив величини кроку h при обчисленні похідних*

Початкові умови:

Початкова точка: (-1.2, 0)

Критерій закінчення:

Величина похибки: 0.001

МОП: Золотий переріз

Величина похибки МОП: 0.001

Величина параметру в алгоритмі Свена: 0.01

Схема похідної: центральна

Дельта лямбда у Свені: 0.01 \*

Результати:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Величина кроку h | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
| 0.1 | [0.32693 0.10388] | 0.45392 | 843 |
| 0.01 | [0.76475 0.58438] | 0.05536 | 3166 |
| 0.001 | [0.81534 0.66392] | 0.03417 | 2408 |
|  | [0.76806 0.58935] | 0.05383 | 2751 |
|  | [0.83631 0.69889] | 0.02682 | 1640 |
|  | [0.76914 0.59021] | 0.05348 | 2239 |
|  | [0.92755 0.85999] | 0.00526 | 1699 |
|  | [0.78929 0.6225 ] | 0.04442 | 2558 |
|  | [0.77247 0.59617] | 0.0518 | 2219 |
|  | [0.8144 0.66232] | 0.03453 | 2588 |
|  | [0.77646 0.60246] | 0.04999 | 3138 |
|  | [0.8317 0.69126] | 0.02835 | 2587 |
|  | [0.78355 0.6136 ] | 0.04686 | 1730 |
|  | [0.80381 0.64559] | 0.03852 | 849 |
|  | [0.9663 0.93346] | 0.00114 | 1591 |

Величина кроку впливала на результат нелінійно, тобто зменшення величини кроку не гарантували підвищення точності. З наведеної таблиці найкраща себе показали , яке підходить більше для зменшення кількості обчислень функції, але з трохи гіршими результатами, або , яка має на 742 обчислень більше, ніж , але це h дало у 30 раз більшу точність.

*Вплив схем обчислення похідних*

Початкові умови:

Початкова точка: (-1.2, 0)

Критерій закінчення:

Величина похибки: 0.001

МОП: Золотий переріз

Величина похибки МОП: 0.001

Величина параметру в алгоритмі Свена: 0.01

Величина кроку у похідних: h =

Дельта лямбда у Свені: 0.01 \*

Результати:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Схема похідних | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
| Центральна | [0.9663 0.93346] | 0.00114 | 1591 |
| Лівостороння | [0.81311 0.66078] | 0.03494 | 1417 |
| Правостороння | [0.90273 0.81438] | 0.00949 | 1513 |

Изображение выглядит как линия, диаграмма, График, оригами

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как снимок экрана, линия, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

Згідно графіку кількості обчислень функцію найкраще себе показала правостороння похідна при точності з кількістю обчислень функції 507, але з графіку значень отримане мінімальне значення функції є дорівнює 0.4086. Найкращі з отриманих результатів:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Похідна | h | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
| Лівостороння |  | [0.90474 0.81790] | 0.009117 | 1165 |
| Правостороння |  | [0.95204 0.90578] | 0.00234 | 1380 |
| Центральна |  | [0.96630 0.93346] | 0.00114 | 1591 |

НУ І БРЄД

На основі наведеної таблиці можна обрати потрібний результат у залежності від того, що нам важливіше – кількість обчислень або точність отриманих результатів. Але швидко перевіривши, як буде вести себе алгоритм при більшій точності, правостороння схема з при збільшила кількість обрахунків з 701 до 6896, а центральна з з 1896 до 1920. Тому у наступних дослідженнях все ж буде використовуватися центральна схема з .

*Способу обчислення кроку: постійний, оптимальний.*

Початкова точка: (-1.2, 0)

Критерій закінчення:

Величина похибки: 0.0001

МОП: Золотий переріз

Величина похибки МОП: 0.001

Величина параметру в алгоритмі Свена: 1

Величина кроку у похідних: h =

Схема похідних: Центральна

Дельта лямбда у Свені: 1 \*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Крок | Зменшення лямбда при збільшені функції | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
|  | У 2 рази | [0.99917 0.99834] | 0.0 | 33104 |
|  | У 2 рази | [0.99019 0.98047] | 0.0001 | 15526 |
|  | У 2 рази | [1.00144 1.00282] | 0.0 | 55 |

Найкраще себе показала , але цей результат є дуже унікальним. Наприклад, почнемо з точки (-1.1, 0) з тими самими параметрами алгоритму. Результати:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Крок | Зменшення лямбда при збільшені функції | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
|  | У 2 рази | [0.98224 0.96476] | 0.00032 | 14075 |
|  | У 2 рази | [0.99019 0.98046] | 0.0001 | 14546 |
|  | У 2 рази | [1.00063 1.00126] | 0.0 | 25775 |

Тобто підібрані параметри для 55 обчислень дуже сильно залежать від початкової точки і не зберігають своїх властивостей при найменшій зміні. Щодо роботи лямбди оптимальної:

Початкова точка: (-1.2, 0)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Крок | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
| МОП (золотий переріз) | [0.96776 0.93647] | 0.00104 | 100 |
| МОП (дск) | [0.95041 0.90334] | 0.00246 | 100 |

Початкова точка: (-1.1, 0)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Крок | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
| МОП (золотий переріз) | [1.07562 1.15734] | 0.00573 | 7863 |
| МОП (дск) | [0.96295 0.9308 ] | 0.00261 | 84 |

Як виявилося, оптимальний крок є більш стійким до зміни початкових параметрів і робить як мінімум у два рази менше обчислень цільової функції, аніж константний крок. Це можна пояснити тим, що фіксований крок не використовує жодної інформації про саму функцію, окрім факту зменшення функції у новій точці. Можливо, результати були би кращими, якби було використано отримання кроку використовуючи інформацію про значення похідних чи функцій на минулих кроках (наприклад алгоритм Adam, який використовує інформацію про значення функції на минулих кроках і є популярним алгоритмом у нейронних мережах), але у цій роботі інші (більш кращі методи) для отримання константної лямбди досліджуватися не будуть.

*Вплив виду методу одновимірного пошуку та точності методу одновимірного пошуку*

Початкова точка: (-1.2, 0)

Критерій закінчення:

Величина похибки: 0.001

Величина параметру в алгоритмі Свена: 0.01

Величина кроку у похідних: h =

Дельта лямбда у Свені: 0.01 \*

Результати:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Метод МОП | Точність МОП | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
| Золотий перетин | 1 | [-0.5701 0.33418] | 2.47361623 | 35 |
| Золотий перетин |  | [-0.5701 0.33418] | 2.47361623 | 35 |
| Золотий перетин |  | [ 0.4266 0.18053] | 0.32900201 | 829 |
| Золотий перетин |  | [ 0.77247 0.59617] | 0.05179839 | 2219 |
| Золотий перетин |  | [ 0.97698 0.95444] | 0.00053006 | 7898 |
| Золотий перетин |  | [ 0.99979 0.99958] | 4e-08 | 14138 |
| Золотий перетин |  | [ 0.99939 0.99878] | 3.7e-07 | 270146 |
| Золотий перетин |  | [ 0.99994 0.99988] | 0.0 | 463535 |
| Золотий перетин |  | [ 0.99998 0.99997] | 0.0 | 600053 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Метод МОП | Точність МОП | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
| ДСК Пауелла | 1 | [-0.51361 0.26943] | 2.29419939 | 40 |
| ДСК Пауелла |  | [-0.51361 0.26943] | 2.29419939 | 40 |
| ДСК Пауелла |  | [ 0.67567 0.45514] | 0.10538051 | 482 |
| ДСК Пауелла |  | [ 0.91256 0.83244] | 0.00765649 | 3304 |
| ДСК Пауелла |  | [ 0.99458 0.98917] | 2.941e-05 | 4248 |
| ДСК Пауелла |  | [ 0.99914 0.99829] | 7.3e-07 | 21956 |
| ДСК Пауелла |  | [ 0.9609 0.92327] | 0.00152913 | 28523 |
| ДСК Пауелла |  | [ 0.99994 0.99988] | 0.0 | 166113 |
| ДСК Пауелла |  | [ 0.99999 0.99999] | 0.0 | 216985 |

*Значення параметру в алгоритмі Свена*

Початкова точка: (-1.2, 0)

Критерій закінчення:

МОП: Золотий переріз

Величина похибки МОП: 0.001

Величина похибки: 0.001

Величина кроку у похідних: h =

Схема похідної: центральна

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Параметр Свена | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
| 10 | [0.96943 0.93934] | 0.00096 | 135 |
| 1 | [0.9682 0.93747] | 0.00101 | 95 |
| 0.1 | [0.86142 0.74089] | 0.01934 | 1433 |
| 0.01 | [0.9663 0.93346] | 0.00114 | 1591 |
| 0.001 | [0.80349 0.64522] | 0.03863 | 1019 |
|  | [0.81851 0.66870] | 0.0331 | 2585 |
|  | [0.79936 0.63767] | 0.04043 | 3595 |
|  | [0.86143 0.7412 ] | 0.01927 | 3552 |
|  | [0.99189 0.98379] | 7e-05 | 2543 |
|  | [0.78858 0.62151] | 0.04471 | 2386 |
|  | [0.77267 0.59568] | 0.05186 | 2985 |
|  | [0.88787 0.78798] | 0.01258 | 164 |
|  | [0.94176 0.88671] | 0.0034 | 2360 |
|  | [0.82962 0.68779] | 0.02905 | 5008 |
|  | [0.77881 0.60602] | 0.04895 | 4336 |
|  | [0.78053 0.60765] | 0.04841 | 4042 |
|  | [0.76276 0.58028] | 0.05651 | 9157 |

*Наявності модифікацій (методи Бута, Люстерніка)*

Початкова точка: (-1.2, 0)

Критерій закінчення:

Величина похибки: від до

МОП: Золотий переріз

Величина похибки МОП: 0.0001

Величина параметру в алгоритмі Свена: 1

Величина кроку у похідних: h =

Схема похідних: Центральна

Дельта лямбда у Свені: 1 \*

Без модифікації (оптимальний крок):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Величина похибки | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
|  | [0.944811 0.892425] | 0.0030517290534505083 | 59 |
|  | [0.944811 0.892425] | 0.0030517290534505083 | 59 |
|  | [0.944811 0.892425] | 0.0030517290534505083 | 59 |
|  | [0.9549 0.911692] | 0.0020360036153700685 | 2992 |
|  | [0.997625 0.995244] | 5.654671001116072e-06 | 11150 |
|  | [1.000018 1.000036] | 3.187467096938542e-10 | 71341 |
|  | [1.000017 1.000035] | 2.9935832718279436e-10 | 71446 |
|  | [0.999996 0.999992] | 1.653632936741718e-11 | 186229 |
|  | [1. 1.] | 4.845172548228179e-15 | 352854 |
|  | [1. 1.] | 3.454693824482231e-17 | 354345 |

Метод Бута

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Величина похибки | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
|  | [0.848868 0.722703] | 0.023292838671245996 | 73 |
|  | [0.850066 0.722198] | 0.022497284225225064 | 104 |
|  | [0.850712 0.722537] | 0.022424769012345636 | 139 |
|  | [0.960754 0.922862] | 0.0015437126434409516 | 2653 |
|  | [0.993329 0.986682] | 4.454622335755933e-05 | 25126 |
|  | [1.000229 1.000458] | 5.238276656513157e-08 | 36056 |
|  | [0.999976 0.999952] | 5.8495937052521e-10 | 127090 |
|  | [0.999995 0.99999 ] | 2.3596883061668478e-11 | 128483 |

Без модифікації (сталий крок)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Величина похибки | Точка мінімуму, до якої прийшов алгоритм | Значення у точці мінімуму | Кількість обчислень функції |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

# **Список використаної літератури**